KESTABILAN TITIK EQUILIBRIUM MODEL SIS DENGAN PERTUMBUHAN LOGISTIK DAN MIGRASI

TUGAS AKHIR

Disusun sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh :

<u>PARUBAHAN SIREGAR</u>
10854004216

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2012

KESTABILAN TITIK EQUILIBRIUM MODEL SIS DENGAN PERTUMBUHAN LOGISTIK DAN MIGRASI

PARUBAHAN SIREGAR
10854004216

Tanggal Sidang : 29 Juni 2012
Periode Wisuda : 2012

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas Akhir ini membahas tentang model penyebaran penyakit menular yaitu model SIS yang dimodifikasi dengan menambahkan pertumbuhan logistik dan juga adanya migrasi dalam populasi. Hasil yang diperoleh dari model ini adalah : jika $\rho_2 < \rho_1 + a$ dan $\beta + \rho_1 < \rho_2 + \gamma$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit adalah stabil asimtotik, sebaliknya jika $2bN + \beta > a + \gamma$ dan $\rho_1 + \rho_2 > a - 2bN$, maka titik kesetimbangan endemik penyakit adalah stabil asimtotik.

Kata Kunci : *model logistik, model SIS, stabil asimtotik, titik kesetimbangan.*

EQUILIBRIUM STABILITY SIS MODEL WITH LOGISTIC GROWTH AND MIGRATION

<u>PARUBAHAN SIREGAR</u>
10854004216

Date of Final Exam : 29 June 2012
Graduation Ceremony Period : 2012

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
JL. HR. Soebrantas no. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

This thessis discusses about mathematical modeling to model the spread of infectious diseases SIS model with logistic growth and migration in the population. The result obtained that is if $\rho_2 < \rho_1 + a \; and \; \beta + \rho_1 < \rho_2 + \gamma$ *disease-free equilibrium is asymptotic stable, otherwise* $2bN + \beta > a + \gamma$ *and* $\rho_1 + \rho_2 > a - 2bN$ *endemic equilibrium is stable asymptotic.*

Key word *: logistic model, SIS model, asymptotic stable, equilibrium point.*

KATA PENGANTAR

Assalamua’laikum Wr.Wb

Alhamdulillah berkat rahmat dan karunia Allah SWT disertai dengan usaha yang sepenuh hati dan dukungan serta bantuan dari berbagai pihak, sehingga penulisan Tugas Akhir ini dapat diselesaikan guna memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana pada Fakultas Sains dan Teknilogi Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau (UIN SUSKA RIAU) dengan judul : **“ Kestabilan Equilibrium Model SIS dengan pertumbuhan logistik dan migrasi “.** Shalawat berserta salam selalu tercurahkan kepada Nabi besar Muhammad SAW, mudah-mudahan kita semua mendapat syafa’at nya kelak, amin.

Pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan rasa hormat dan terimakasih yang sebesar-besarnya atas petunjuk, bimbingan, motivasi dan tuntunan baik dari moril maupun materi dalam penulisan Tugas Akhir ini kepada :

1. Bapak Prof. DR. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau yang telah memberikan kesempatan serta izinnya kepada penulis untuk menuntut ilmu pada Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Mohammad Soleh, M.Sc selaku pembimbing yang telah banyak memberikan bantuan, meluangkan banyak waktu kepada penulis, mengarahkan, mendukung, dan membimbing serta memotivasi penulis dengan penuh kesabaran dalam menyelesaikan penulisan Tugas Akhir ini.
4. Bapak Wartono, M.Sc selaku penguji I yang telah memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan Tugas Akhir ini.
5. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc selaku penguji II yang telah memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan Tugas Akhir.
6. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku koordinator Tugas Akhir yang telah banyak membantu dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.

7. Seluruh Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi yang telah mengajari dan membimbing penulis selama kuliah.
8. Bapak dan Ibu pegawai Tata Usaha beserta seluruh Staf Pengajar Fakultas Fakultas Sains dan Teknologi.
9. Teman-teman dan sahabat-sahabatku tercinta mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

Kemudian penulis juga dengan tulus ikhlas mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Almarhum Ayahanda Muhammad Gandhi Siregar (Tongku Asin Siregar) yang telah memberikan kasih sayang dan bantuan moril, materil, maupun spiritual semasa hidupnya, beserta Ibunda tercinta Aslamiah yang dengan penuh kasih sayang telah memberikan dorongan, doa dan semangat sehingga penulis termotifasi untuk terus melangkah demi mencapai dan menggapai cita-cita.
2. Buat yang tersayang keluargaku Abangku Damres, Panggana, Dakut, Feri Anto dan Edi Shaputra serta Adikku Agus Salim yang telah banyak memberikan doa, dukungan, cinta dan kasih sayang kepada penulis.
3. Rakan-rekan mahasiswa seperjuangan di kampus dan diluar kampus HMJ-MT, BEM FST, HIMAPALUTA, IMMAFARI dan pihak-pihak yang telah banyak membantu dan turut mendoakan hingga selesainya skripsi ini.
4. Temanku tercinta Siti Markomah, Siti Rahma, Isma neti, Irawati, Desi Murnita, Defi Anggraini, Afriansah Frendika, Fitriadi dan yang lainnya yang selalu ada waktunya untuk menemani dan membantu penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Dengan segala keterbatasan ilmu yang penulis miliki, penulis menyadari bahwa dalam penulisan Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan-kekurangan, demi untuk kesempurnaan, penulis mengharapkan kritik dan saran dari para pembaca.

Akhirnya penulis mendo'akan kepada Allah SWT semoga amal kebaikan dari semua pihak akan mendapat balasan yang setimpal.

Pekanbaru, Juni 2012

Penulis,

Parubahan Siregar

NIM : 10854004216

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penyakit infeksi atau penyakit menular merupakan salah satu masalah utama dalam kehidupan manusia. Hal ini dikarenakan penyakit infeksi merupakan pembunuh terbesar populasi manusia di samping perang.

Penyebaran berbagai jenis penyakit menular telah menjadi perhatian yang begitu luas dari masyarakat karena telah banyak mengakibatkan kematian dan kerugian. Hal ini akan semakin berdampak buruk jika tidak segera di atasi dengan baik. Salah satu cara untuk mengatasi masalah penyebaran penyakit menular ini dapat menggunakan penerapan ilmu matematika dengan pemodelan matematika.

Pemodelan matematika merupakan salah satu terapan dari ilmu matematika yang dapat memodelkan masalah-masalah di lingkungan sekitar termasuk penyebaran penyakit menular, baik yang menyebabkan kematian (fatal) dan ataupun yang tidak menyebabkan kematian (tidak fatal).

Model penyebaran penyakit pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927 yaitu model SIR (*suspectible, infectives, recovered*). Model SIR adalah model penyebaran penyakit yang membagi populasi menjadi tiga kelas yaitu kelas *susceptible,* kelas yang berisi individu-individu rentan terhadap penyakit yang dibicarakan, kelas *infectives* adalah kelas yang didalamnya terdapat individu yang telah terinfeksi penyakit dan mampu menularkan penyakit yang dibicarakan, dan kelas *recovered* adalah kelas yang telah sembuh dari sakit dan telah mengalami kekebalan tubuh terhadap penyakit. Model SIR dapat berubah jika terjadi perubahan pada asumsi-asumsi, yaitu di antaranya menjadi model SEIR (*suspectible, exposed, infectives, recovered*), model SIAR (*suspectible, infectives, aids, recovered),* SIS (*suspectible, infectives, suspectible*), dan IA (*infectives, aids*).

Model SIS adalah model yang mengasumsikan individu yang telah sembuh tidak mengalami kekebalan atau masih dapat tertular penyakit kembali dengan kata lain masuk ke kelas *susceptible*. Contoh penyakit yang dapat diterapkan dengan model SIS ini di antaranya yaitu influenza, tuberculosis, dan malaria. Beberapa penelitian tentang model penyebaran penyakit yang menggunakan model SIS atau modifikasinya diantaranya adalah jurnal matematika yang berjudul *analisis kestabilan titik tetap pada model SIS dengan penambahan populasi rentan, konstan dan penambahan populasi dan kematian, sesuai persamaan logistik* **(Ferawati, 2004),** Tugas Akhir Matematika yang berjudul *Model SIS (Suspectible, Infectives, Suspectible) dengan pertumbuhan alami dan proses migrasi* **(Helvi Agustianti Umbari, 2012)**.

Dari latar belakang tersebut, penulis tertarik untuk meneliti dan mengulas tentang kestabilan titik equilibrium model SIS dengan menambahkan pertumbuhan logistik dan juga adanya migrasi pada suatu populasi.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah : “Bagaimanakah menentukan Kestabilan titik equilibrium model penyebaran penyakit menular menggunakan model SIS dengan pertumbuhan logistik dan migrasi ?”

1.3 Batasan Masalah

Agar penulisan Tugas Akhir ini menjadi lebih terarah, permasalahan ini hanya dibatasi pada pembahasan mengenai kestabilan titik equilibrium, model matematika untuk penyebaran penyakit menular dengan menggunakan model SIS dengan pertumbuhan logistik dan migrasi.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk memperoleh model penyebaran penyakit menular menggunakan model SIS dengan pertumbuhan logistik dan migrasi.
2. Untuk mengetahui kestabilan titik equilibrium model SIS dengan pertumbuhan logistik dan migrasi.
3. Untuk mengetahui perkembangan penyakit menular melalui model penyebaran penyakit yaitu model SIS dengan pertumbuhan logistik dan migrasi.
4. Untuk mengetahui bagaimana proses ataupun cara menyelesaikan persoalan yang berbentuk pemodelan matematika yang dalam hal ini mengkaji tentang penyebaran penyakit menular.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari pembahasan masalah ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk dapat memahami dan menentukan kestabilan titik kesetimbangan model SIS dengan pertumbuhan logistik dan migrasi.
2. Untuk memperdalam dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari dalam mengkaji permasalahan tentang pemodelan matematika, yang mana dalam hal ini Mengkaji tentang model SIS yang dimodifikasi pada penyakit menular.
3. Sebagai bahan informasi bagi penelitian ilmiah selanjutnya.

1.6 Sistematika Penulisan

Pada bagian ini akan diuraikan secara ringkas mengenai sistematika penulisan dalam pembuatan Tugas Akhir ini yang dibagi kedalam lima bab. Adapun pokok atau hal penting yang dibahas pada masing-masing bab adalah sebagai berikut :

BAB I Pendahuluan

Bab ini merupakan pendahuluan yang berisikaan tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Bab ini menyajikan tentang teori-teori yang mendukung dalam pembuatan Tugas Akhir ini. Adapun teori-teori tersebut diantaranya adalah sistem persamaan differensial, titik kesetimbangan penyakit, pemodelan matematika, model logistik, serta model SIS.

BAB III Metodologi Penelitian

Pada bab ini akan diuraikan mengenai langkah-langkah yang penulis gunakan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

BAB IV Pembahasan dan Analisa

Bab ini berisikan tentang pembahasan mengenai model matematika penyebaran penyakit menular menggunakan model SIS dengan pertumbuhan logistik dan migrasi.

BAB V Penutup

Bab ini merupakan bab terakhir yang berisi tentang kesimpulan dan saran yang diperoleh dari hasil penelitian ataupun Tugas Akhir ini.

BAB II
LANDASAN TEORI

Pemodelan matematika merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang cukup penting dan banyak manfaatnya. Beberapa situasi sejalan dengan semakin kompleksnya permasalahan pemodelan matematika dapat diterapkan langsung untuk memecahkan suatu masalah dalam kehidupan nyata, diantaranya permasalahan-permasalahan pada bidang kedokteran, meteorologi, farmakologi dan sebagainya.

Beberapa teori yang dibutuhkan untuk membahas model SIS pada Tugas Akhir ini diantaranya adalah:

2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat *n* buah persamaan diferensial, dengan *n* buah fungsi yang tidak diketahui, dimana *n* merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan 2 **(Finizio dan Ladas, 1982)**.

Persamaan diferensial merupakan suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas. sedangkan sistem persamaan diferensial terdiri dari beberapa persamaan diferensial.

Didefinisikan :

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $f_i: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f_i adalah fungsi kontinu pada E, dengan $i = 1,2, \dots, n$.

Diberikan sistem persamaan diferensial otonomous yang berbentuk :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2 \dots x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2 \dots x_n). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sistem (2.1) secara sederhana dapat ditulis dalam bentuk :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}). \tag{2.2}$$

Sistem (2.1) dikatakan linear jika $f_1, f_2, \dots, f_n$ masing-masing linear dalam $x_1, x_2, \dots, x_n$. Sebaliknya disebut sistem persamaan diferensial nonlinear.

Jika Sistem (2.1) linear, maka Sistem (2.1) dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \dot{x_n} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Selanjutnya Sistem (2.3) dapat ditulis dalam bentuk :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax},$$

dengan A matriks ukuran $n \times n$, dan $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$

Solusi Sistem (2.2) diberikan oleh definisi di bawah ini :

(Perko, 1991) Diberikan $E \subseteq R^n$**,** E himpunan terbuka, dan $f_i \in C(E, R)$, $i = 1,2, \dots, n$. Vektor $x(t) \in R^n$ disebut penyelesaian Sistem (2.2) pada interval I jika $x(t)$ diferensiabel pada I dan $\frac{dx}{dt} = f(x(t))$ untuk setiap $t \in I\,, x(t) \in E$.

2.2 Titik Kesetimbangan dan Kestabilannya

Secara umum, model penyebaran penyakit biasanya mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit. Titik kesetimbangan bebas penyakit artinya dalam populasi tidak ada individu yang terinfeksi penyakit, sedangkan titik kesetimbangan endemik penyakit artinya selalu ada individu yang terinfeksi penyakit. Definisi secara formal mengenai titik kesetimbangan menurut Meiss **(2007)** titik $\bar{x} \in R^n$ disebut titik kesetimbangan (titik *equilibrium*) Sistem (2.2) jika $f(\bar{x}) = 0$.

Konsep perilaku sistem pada titik kesetimbangan (*equilibrium*) dikenal sebagai kestabilan titik kesetimbangan. Kestabilan tersebut merupakan informasi untuk menggambarkan perilaku sistem. Di bawah ini definisi formal mengenai kestabilan titik kesetimbangan **(Hale, 1991)**: Titik kesetimbangan (*equilibrium*) $\bar{x} \in R^n$ dari sistem $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dikatakan:

a. Stabil lokal jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap solusi Sistem (2.2) $x(t)$ yang memenuhi $\|(xt_0) - \bar{x}\| < \delta$ maka berakibat $\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$.
b. Stabil asimtotik lokal jika titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ stabil dan terdapat bilangan $\delta_0 > 0$ sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta_0$ maka berakibat $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$.
c. Tidak stabil jika titik e*quilibrium* $\bar{x} \in R^n$ tak memenuhi (a).

Jika untuk sembarang titik awal, solusi sistem persamaan diferensial $x(t)$ berada dekat dengan titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ maka titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ stabil global. Sementara itu jika untuk sembarang titik awal, solusi sistem persamaan diferensial $x(t)$ berada dekat dengan titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ dan untuk t membesar menuju tak hingga $x(t)$ konvergen ke $\bar{x} \in R^n$, maka titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ stabil asimtotik global.

Sifat kestabilan titik *equilibrium* Sistem (2.2) dapat didekati dengan menggunakan metode linearisasi. Metode ini digunakan untuk mengetahui perilaku sistem persamaan diferensial yang tidak dapat ditentukan penyelesaian eksaknya. Sebelum penyelesaian dengan metode linearisasi, perlu ditentukan terlebih dahulu matriks Jacobian di titik $\bar{x}$. Di bawah ini diberikan definisi matriks Jacobian di titik $\bar{x}$ **(Hale, 1991):**

Diberikan $f = (f_1, \ldots, f_n)$ pada Sistem (2.1) di atas dengan $f_i \in c^1(E),\ i = 1,2,\ldots,n$.

$$Jf(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix},$$

dinamakan matriks Jacobian dari f di titik $\bar{x}$.

Setelah matriks Jacobian didapat, maka langkah selanjutnya adalah mencari penyelesaian eksaknya. Didalam menentukan atau mencari nilai eksaknya adalah tidak mudah, sehingga untuk mengetahui perilaku sistem yang tidak dapat ditentukan penyelesaian eksaknya dilakukan dengan menggunakan metode linearisasi. Berikut definisi mengenai metode linearisasi **(Meiss, 2007)** :

Sistem $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))\, x$ disebut linearisasi Sistem (2.2) di $(\bar{x})$.

Dengan menggunakan matriks Jacobian $J(f(\bar{x}))$, sifat kestabilan titik *equilibrium* $\bar{x}$ dapat diketahui asalkan titik tersebut hiperbolik. Berikut diberikan definisi titik hiperbolik **(Meiss, 2007)** :

Titik equilibrium $\bar{x}$ disebut titik equilibrium hiperbolik jika semua nilai eigen $Jf(\bar{x})$ mempunyai bagian real tak nol.

Nilai eigen dapat ditentukan melalui persamaan karakterisrik dari matriks Jacobian di titik $\bar{x}$. Berikut adalah kriteria kestabilan titik *equilibrium* pada Sistem (2.2) tersebut disajikan pada teorema **(Hale, 1991)** dibawah ini :

a. Jika semua nilai eigen dari matriks jacobian $J(f(\bar{x}))$ mempunyai bagian real negatif, maka titik equilibrium $\bar{x}$ dari Sistem (2.2) stabil asimtotik.
b. Jika terdapat nilai eigen dari matriks jacobian $J(f(\bar{x}))$ mempunyai bagian real positif, maka titik equilibrium $\bar{x}$ dari Sistem (2.2) tidak stabil.

Berikut ini diberikan bentuk khusus dari kestabilan titik kesetimbangan untuk sistem linear dua variabel terikat.

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

dengan a, b, c dan d konstan. Misalkan λ nilai eigen dari Matriks $\text{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \tag{2.5}$$

Berdasarkan persamaan (2.5) di atas, diperoleh:

$$\lambda_{1.2} = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2},$$

atau

$$\lambda_{1.2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

dengan $p = a + d$ dan $q = ad - bc$.

Stabilitas Sistem linier (2.2) dapat diterangkan sebagai berikut:

1. $\lambda_{1.2}$ real dan berbeda jika $\Delta = p^2 - 4q > 0$
   a. $\lambda_{1.2}$ sama tanda jika $q > 0$:
      - $\lambda_{1.2}$ semua positif jika $p > 0 \rightarrow$ tidak stabil.
      - $\lambda_{1.2}$ semua negatif jika $p < 0 \rightarrow$ stabil.

   b . $\lambda_{1.2}$ beda tanda jika $q < 0 \rightarrow$ tidak stabil.

   c. Salah satu dari $\lambda_{1.2}$ nol, jika $q = 0$.
      - Akar lainnya positif jika $p > 0 \rightarrow$ tidak stabil.
      - Akar lainnya negatif jika $p < 0 \rightarrow$ stabil netral.
2. $\lambda_{1.2}$ real dan sama jika $\Delta = 0$.
   a. $\lambda_{1.2}$ sama tanda :
      - Keduanya positif jika $p > 0 \rightarrow$ tidak stabil.
      - Keduanya negatif jika $p < 0 \rightarrow$ stabil.

   b. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, bila $p > 0 \rightarrow$ tidak stabil.
3. $\lambda_{1.2}$ kompleks bila $\Delta < 0$.
   a. Real $\lambda_{1.2}$ sama tanda :
      - Real $\lambda_{1.2}$ semua positif bila $p > 0 \rightarrow$ tidak stabil.
      - Real $\lambda_{1.2}$ semua negatif bila $p < 0 \rightarrow$ stabil.

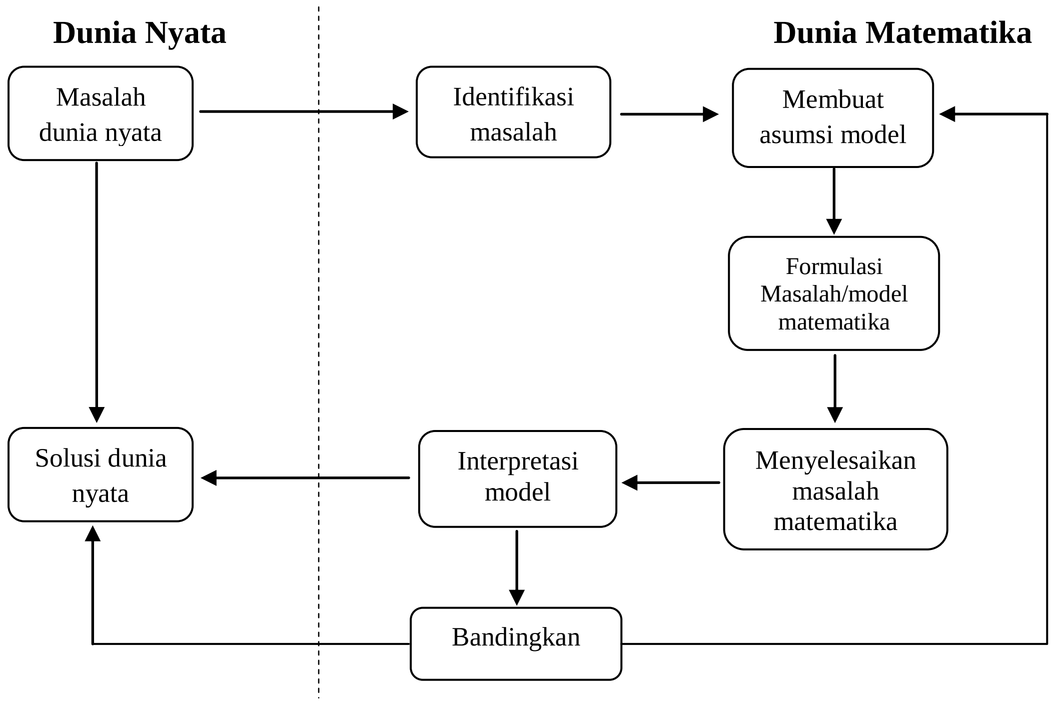
   b. Real $\lambda_{1.2}$ bila $p = 0 \rightarrow$ stabil netral

2.3 Model Matematika

Pemecahan masalah dalam dunia nyata dengan matematika dilakukan dengan mengubah masalah tersebut menjadi bahasa matematika. Proses tersebut disebut pemodelan secara matematik atau model matematika **(Baiduri, 2002).** Jadi pemodelan matematika dapat dipandang sebagai terjemahan dari fenomena atau masalah menjadi permasalahan matematika. Informasi matematika yang diperoleh dengan melakukan kajian matematika atas model tersebut dilakukan sepenuhnya dengan menggunakan kaedahkaedah matematika. Syarat utama model yang baik adalah sebagai berikut :

a. Representatif, artinya model mewakili dengan benar sesuatu yang diwakili, makin mewakili, model makin kompleks.
b. Dapat dipahami/dimanfaatkan, artinya model yang dibuat harus dapat dimanfaatkan (dapat diselesaikan secara matematis), makin sederhana makin mudah diselesaikan.

Secara umum langkah-langkah dalam pemodelan matematika dapat digambarkan dalam diagram Alur berikut :



Gambar 2.1 Diagram Proses Pemodelan Matematika.

Keterangan :

1. Identifikasi masalah, yaitu mampu memahami masalah yang diambil dari dunia nyata yang akan dirumuskan sehingga dapat ditranslasi ke dalam bahasa matematika.
2. Membuat asumsi, yaitu dengan cara menyederhanakan banyaknya faktor yang berpengaruh terhadap kejadian yang sedang diamati dengan mengasumsi hubungan sederhana antara variabel. Asumsi tersebut dibagi dalam dua kategori utama :

a. Klasifikasi variabel

   Pemodel mengidentifikasi variabel terhadap hal-hal yang mempengaruhi tingkah laku pengamatan

b. Menentukan interelasi antara variabel yang terseleksi untuk dipelajari. Pemodel membuat sub model sesuai asumsi yang telah dibuat pada model utama, kemidian mempelajari secara terpisah pada satu atau lebih variabel bebas.

3. Memformulasikan masalah kedalam bentuk matematika

   Setelah asumsi-asumsi dibuat, maka selanjutnya asumsi-asumsi tersebut dibentuk kedalam bentuk matematika atau sering disebut sebagai model matematika.

4. Menyelesaikan dan Menginterpretasikan model

   Setelah model diperoleh kemudian diselesaikan secara matematis, dalam hal ini model yang digunakan dan penyelesaiannya menggunakan persamaan diferensial. Apabila pemodel mengalami kesulitan untuk menyelesaikan model dan interpretasi model, maka kelangkah 2 dan membuat asumsi sederhana tambahan atau kembali kelangkah 1 untuk membuat definisi ulang dari permasalahan. Penyederhanaan atau definisi ulang sebuah model merupakan bagian yang penting dalam matematika model.

5. Membandingkan solusi atau hasil yang diperoleh. Artinya apakah hasil yang diperoleh sesuai dengan asumsi yang dibuat berdasarkan data yang ada.

Sebelum menyimpulkan kejadian dunia nyata dari hasil model, terlebih dahulu model tersebut harus diuji. Beberapa pertanyaan yang diajukan sebelum melakukan uji dan mengumpulkan data, yaitu : 1. apakah model menjawab masalah yang telah diidentifikasi? 2. apakah model membuat pemikiran yang sehat? 3. apakah data (sebaiknya menggunakan data aktual yang diperoleh dari observasi empirik) dapat dikumpulkan untuk menguji dan mengoperasikan model dan apakah memenuhi syarat apabila diuji **(Baiduri, 2002).**

2.4 Model Pertumbuhan Logistik

Setiap makhluk hidup selalu mengalami perubahan dari waktu ke waktu, dimulai dari adanya kelahiran, perkembangan, hingga kematian. Untuk menggambarkan pertumbuhan suatu populasi, pada tahun 1838 Verhulst memperkenalkan suatu model pertumbuhan yang sering disebut model pertumbuhan logistik. Pada model pertumbuhan logistik ini diasumsikan bahwa tidak ada penundaan waktu pada proses pertumbuhan populasi. Selain itu pada model ini dihasilkan solusi yang berbentuk fungsi monoton (naik atau turun). Fungsi seperti ini memberikan penafsiran bahwa jumlah populasi akan terus bertambah (tidak pernah berkurang) atau akan terus berkurang (tidak perna bertambah).

Salah satu model pertumbuhan populasi adalah model pertumbuhan logistik (*logistic growth models*). Dengan menggunakan kaidah logistik (*logistic law*) bahwa persediaan logistik ada batasnya, model ini mengasumsikan bahwa pada masa tertentu jumlah populasi akan mendekati titik kesetimbangan (*equilibrium*). Pada titik ini jumlah kelahiran dan kematian dianggap sama, sehingga grafiknya akan mendekati konstan (*zero growth*). Misalkan (t) menyatakan jumlah populasi pada saat t, dan R_0 menyatakan laju pertumbuhan populasi maka secara umum laju pertumbuhan yang bergantung pada suatu populasi, sebagai berikut :

$$\frac{dN}{dt} = R_0 N$$

Model logistik atau model Verhulst adalah sebuah model pertumbuhan populasi. Model logistik termasuk model yang memiliki waktu kontinu.

Diberikan $R(N) = a - bN$, dimana $R(N)$ adalah laju pertumbuhan populasi yang berupa fungsi yang berbentuk garis lurus dan $\frac{dN}{dt} = N\,R(N)$ adalah bentuk umum laju pertumbuhan populasi untuk N populasi, supaya menghasilkan keadaan yang berubah-ubah atau tidak tetap. Dengan mensubtitusikan $R(N)$ kedalam persamaan $\frac{dN}{dt} = N\,R(N)$, maka dihasilkan sebuah persamaan baru yang disebut sebagai persamaan logistik yaitu :

$$\frac{dN}{dt} = N(a - bN) \quad \text{atau} \quad \frac{dN}{dt} = aN - bN \cdot N\,,$$

dimana a adalah proporsi kelahiran alami (pertumbuhan alami) dan b adalah proporsi kematian alami pada populasi.

Jika diselesaikan, maka persamaan logistik mempunyai solusi sebagai berikut:

Diketahui : $\frac{dN}{dt} = N(a - bN)$

Sehingga, $\frac{dN}{N(a-bN)} = dt$, kemudian diintegralkan

$$\int \frac{dN}{N(a-bN)} = \int dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{N(a-bN)} = t + c$$

dengan $\Leftrightarrow \frac{1}{N(a-bN)} = \frac{1/a}{N} + \frac{b/a}{a-bN}$,

hasil integrasinya $\frac{1}{a}\ln|N| - \frac{1}{a}\ln|a - bN| = t + c.$

Jika $N(0) = N_0$, sehingga $c = \frac{1}{a}\ln|N_0| - \frac{1}{a}\ln|a - bN_0|$

$$\frac{1}{a}\ln|N| - \frac{1}{a}\ln|a - bN| = t + \frac{1}{a}\ln|N_0| - \frac{1}{a}\ln|a - bN_0|$$

sementara N dan N_0harus bernilai fositif, sehingga

$$\frac{1}{a}\ln\frac{N}{N_0} + \frac{1}{a}\ln\frac{a-bN_0}{a-bN} = t$$

$\frac{N}{N_0}\left|\frac{a-bN_0}{a-bN}\right| = e^{at}$, ekuivalen dengan

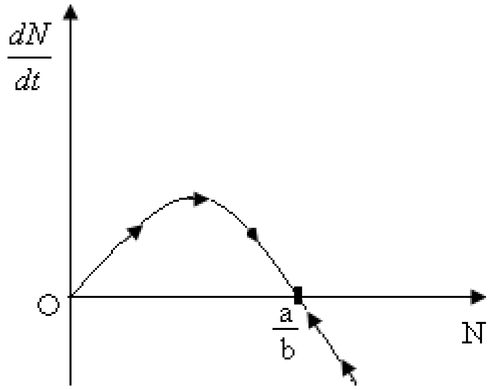
$$a - bN = (\,a - bN_0)N_0e^{at}$$

Maka didapat nilai untuk N , yaitu :

$N = \frac{\mathrm{a}N_0e^{at}}{a-bN_0+bN_0e^{at}}$, atau

$$N = \frac{\mathrm{a}/\mathrm{b}}{1+(\frac{a-bN_0}{bN_0})e^{-at}}\,.$$

Untuk lebih memudahkan dalam memahami model logistik, berikut adalah kurva penyelesaian persamaan logistik:



Gambar 2.2 Kurva Persamaan Logistik untuk $\frac{dN}{dt}$.

dari gambar 2.2 terlihat bahwa $0 < N < K$ berlaku $\frac{dN}{dt} > 0$ yang berarti N adalah fungsi naik pada selang tersebut. Demikian juga jika $N > K$ maka $\frac{dN}{dt} < 0$ yaitu berarti N adalah fungsi turun. Kemudian jika $N = 0$ atau $N = K$, maka $\frac{dN}{dt} = 0$ dan $N(t)$ tidak berubah sehingga titik $N = 0$ dan $N = K$.

Berdasarkan gambar diatas bahwa jika populasi awal nol, maka akan selamanya nol. Hal ini karena $\frac{dN}{dt} = 0$, dimana $N = 0$. interprestasi secara biologi hal ini disebabkan karena tidak ada individu yang berkembang biak. Sedangkan bila populasi awal $N = \frac{a}{b}$, selamanya N juga akan tetap sama dengan $\frac{a}{b}$. Hal ini disebabkan karena $\frac{dN}{dt} = 0$, dimana $N = 0$. sedangkan interpresatasi biologinya hal ini dapat disebabkan oleh daya dukung lingkungan yang cukup ideal hanya untuk sejumlah $\frac{a}{b}$. Dengan demikian banyaknya populasi tidak dapat berkurang atau bertambah.

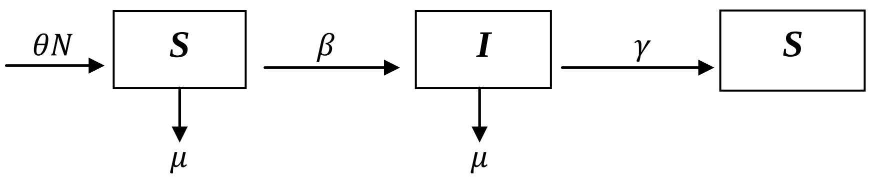
2.5 Model SIS

Menurut Iannelli, beberapa penyebaran penyakit infeksi dapat dimodelkan dengan model *SIS*. Pada model *SIS* populasi dikelompokkan menjadi dua yaitu *susceptible* (S) dan *infected* (I). *Susceptible* adalah kelompok yang sehat tetapi rawan terinfeksi penyakit dan *infected* adalah kelompok yang telah terinfeksi penyakit.

Untuk menurunkan model *SIS* diperlukan asumsi-asumsi yang harus dipenuhi. Berikut asumsi-asumsi dalam penurunan model *SIS.*

1. Individu yang lahir merupakan individu yang sehat tetapi rentan terserang suatu penyakit. Laju kelahiran yang masuk sama dengan laju kematiannya, sehingga populasi pada suatu wilayah adalah konstan.
2. Jumlah individu dalam populasi bercampur secara homogen, sehingga bisa terjadi kontak langsung dengan individu terinfeksi atau melalui perantara lainnya dalam penularan penyakit. Dengan laju kontak atau penularannya adalah konstan.
3. Hanya terdapat satu jenis penyakit, sehingga hanya terdapat satu macam penularan dengan penyakit yang sama.
4. Individu yang telah sembuh dianggap tidak memliki kekebalan permanen sehingga dapat tertular penyakit lagi.
5. Masa inkubasi penyakit tidak diperhatikan.
6. Infeksi penyakit tidak menyebabkan kematian terhadap penderitanya.
7. Tidak terjadi emigrasi atau imigrasi dalam daerah tersebut.

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas, maka diperoleh diagram alir model SIS pada gambar di bawah ini :



Gambar 2.3 Diagram Alir Model SIS.

Gambar 2.3 di atas merupakan gambar yang menjelaskan tentang proses penyebaran penyakit menular. Penyebaran penyakit menular terjadi karena adanya kontak dengan individu *infected*. Laju kontak dinotasikan dengan β dan banyaknya individu *susceptible* yang menjadi *infected* yaitu sebesar $\frac{\beta SI}{N}$ untuk setiap t. dalam populasi jika terjadi kelahiran yang dinyatakan sebagai θ maka jumlah populasi pada kelompok *susceptible* bertambah sebesar θN. Akan tetapi, tetap berkurang dikarenakan adanya kematian alami pada kelompok *susceptible* yaitu sebesar μS. Jumlah individu yang sembuh dari sakit kemudian masuk dalam kelompok *susceptible.* Besarnya laju kesembuhan penyakit dinotasikan dengan γ. Sehingga banyaknya individu yang sembuh adalah γI. Dari hal tersebut diperoleh laju perubahan populasi pada kelompok *susceptible* (S) untuk setiap t waktu dapat diekspresikan sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = \theta\, N - \mu\, S - \beta S \frac{I}{N} + \gamma\, I\ .$$

Berkurangnya individu *susceptible* karena terinfeksi oleh suatu penyakit mengakibatkan bertambahnya individu *infected* sebanyak $\beta \frac{SI}{N}$. Pada kelompok *infected* terjadi kematian alami yang mengakibatkan berkurangnya individu *infected* sebesar μI. Individu *infected* yang telah sembuh akan mengakibatkan berkurangnya jumlah individu *infected* dengan laju kesembuhan γ sebanyak γI. Sehingga didapat laju perubahan populasi pada kelompok *infected* (I) untuk setiap *t* waktu yang diekspresikan sebagai berikut :

$$\frac{dI}{dt} = \beta S \frac{I}{N} - \mu I - \gamma I.$$

dari kedua persamaan diatas, diperoleh model *SIS* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \theta\, N - \mu\, S - \beta S \frac{I}{N} + \gamma I \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S \frac{I}{N} - \mu I - \gamma I \end{aligned} \tag{2.6}$$

dengan $S + I = N$ merupakan jumlah populasi keseluruhan.

Jika sistem (2.6) di atas diselesaikan maka akan diperoleh solusi untuk $N(t)$ sebagai berikut:

Diketahui $N = S + I$ maka $\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt}$, sehingga :

$$\frac{dN}{dt} = \ \theta\, N - \mu\, S - \beta S \frac{I}{N} + \gamma I + \beta S \frac{I}{N} - \mu I - \gamma I$$

bentuk di atas dapat disederhanakan menjadi :

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \theta N - \mu S - \mu I \\ &= \theta N - (S + I)\mu \\ &= \theta N - \mu N \end{aligned}$$

$$= (\theta - \mu)N.$$

Setelah $\frac{dN}{dt} = (\theta - \mu)N$ diperoleh, maka dicari solusi untuk $N(t)$, sehingga:

$$\frac{dN}{dt} = (\theta - \mu)N$$

$$\int \frac{dN}{N} = \int (\theta - \mu)\, dt$$

$$\ln N = (\theta - \mu)t + C$$

$$N(t) = e^{(\theta-\mu)t+C}$$

$$= (e^{(\theta-\mu)t})e^{C} .$$

Jika misalkan nilai awal $t = 0$ dan $(0) = N_0$, maka bentuk di atas menjadi :

$$N(0) = e^{(\theta-\mu)(0)}e^{C}$$

$$N(0) = e^{0}e^{C}$$

$$N(0) = e^{C},$$

sehingga bentuk persamaan awalnya akan berubah menjadi :

$$N(t) = e^{C}(e^{(\theta-\mu)t}).$$

Karena $N(0) = e^{C} = N_0$, maka diperoleh solusi untuk $N(t)$ sebagai berikut:

$$N(t) = N_0 .\, e^{(\theta-\mu)t} .$$

Dari bentuk di atas, maka dapat diambil beberapa kemungkinan dalam suatu populasi, yaitu :

a. Jika $b = \mu$ maka $\lim_{t\to\infty} N(t) = N_0$ atau populasi tetap.
b. Jika $b > \mu$ maka $\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$ atau populasi meningkat.
c. Jika $b < \mu$ maka $\lim_{t\to\infty} N(t) = 0$ atau populasi menurun.

Kemudian akan dicari titik kesetimbangan dan stabilitas kesetimbangannya, sebagai berikut:

1. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Untuk mendapatkan titik kesetimbangan Sistem (2.6), maka kedua persamaan pada Sistem (2.6) diberi nilai nol, sehingga menjadi :

$$\theta N - \mu S - \beta S \frac{I}{N} + \gamma I = 0$$

$$\beta S \frac{I}{N} - \mu I - \gamma I = 0 \qquad (2.7)$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit artinya dalam populasi tidak ada individu yang sakit ($I = 0$), maka dari Persamaan pertama pada Sistem (2.7) dilakukan penyelesaian untuk mendapatkan S pada titik kesetimbangan bebas penyakit :

$$\theta\, N - \mu\, S - \beta S \frac{I}{N} + \gamma I = 0$$

$$\theta N - \mu S = 0$$

$$\mu S = \theta N$$

$$S = \frac{\theta N}{\mu}$$

artinya titik kesetimbangan bebas penyakit yang dinotasikan dengan S^*, yaitu $S^* = \frac{\theta N}{\mu}$.

Berdasarkan penyelesaian di atas, maka diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit $(I^*, S^*) = \left(0\,,\ \frac{\theta N}{\mu}\right)$.

2. Titik Kesetimbangan Endemik Penyakit

Titik kesetimbangan endemik penyakit artinya selalu ada penyakit dalam populasi ($I > 0$), sehingga persamaan kedua pada Sistem (2.7) dapat diselesaikan seperti berikut :

$$\beta S \frac{I}{N} - \mu I - \gamma I = 0$$

$$(\beta \frac{S}{N} - \mu - \gamma) I = 0 \qquad \text{dimana } I \neq 0 \text{, sehingga}$$

$$\left(\beta \frac{S}{N} - \mu - \gamma\right) = 0$$

$$\beta \frac{S}{N} = \mu + \gamma$$

sehingga diperoleh S untuk titik kesetimbangan endemik penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{S}$, yaitu $\hat{S} = \frac{(\mu+\gamma)}{\beta} N$.

Oleh Karena $S + I = N$ maka I dapat dicari setelah S diketahui, untuk mendapatkan I dapat dilihat seperti berikut ini :

$$S + I = N$$

$$I = N - S$$

$$I = N - \left(\frac{(\mu+\gamma)}{\beta} N\right)$$

sehingga diperoleh I untuk titik kesetimbangan endemik penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{I}$, yaitu $\hat{I} = \frac{(\beta-\mu-\gamma)}{\beta}N$.

Berdasarkan penyelesaian di atas, maka diperoleh titik kesetimbangan endemik penyakit $\left(\hat{I},\hat{S}\right) = \left(\frac{(\beta-\mu-\gamma)}{\beta}N, \frac{(\mu+\gamma)}{\beta}N\right)$.

Setelah titik kesetimbangan diperoleh, maka selanjutnya akan dicari kestabilan titik kesetimbangan. Untuk mengetahui kestabilan titik kesetimbangan pada sistem (6) dapat dilihat uraian di bawah ini :

Dimisalkan :

$$f(I,S) = \theta N - \mu S - \beta S\frac{I}{N} + \gamma I,$$

$$g(I,S) = \beta S\frac{I}{N} - \mu I - \gamma I .$$

Kemudian masing-masing fungsi diturunkan secara parsial terhadap variabel pada fungsi tersebut, seperti di bawah ini :

- Fungsi $f(I,S)$ diturunkan terhadap variabel S :

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{\partial\left(\theta\,(S+I) - \mu\, S - \beta S\frac{I}{N} + \gamma I\right)}{\partial S} = \theta - \mu - \beta\,\frac{I}{N}$$

- Fungsi $f(I,S)$ diturunkan terhadap variabel I :

$$\frac{\partial f}{\partial I} = \frac{\partial\left(\theta\,(S+I) - \mu\, S - \beta S\frac{I}{N} + \gamma I\right)}{\partial I} = \theta - \beta\,\frac{S}{N} + \gamma$$

- Fungsi $g(I,S)$ diturunkan terhadap variabel S :

$$\frac{\partial g}{\partial S} = \frac{\partial(\beta S\frac{I}{N} - \mu I - \gamma I)}{\partial S} = \beta\,\frac{I}{N}$$

- Fungsi $g(I,S)$ diturunkan terhadap variabel I :

$$\frac{\partial g}{\partial I} = \frac{\partial(\beta S\frac{I}{N} - \mu I - \gamma I)}{\partial I} = \beta\,\frac{S}{N} - \mu - \gamma.$$

Selanjutnya dibentuk ke dalam matriks jacobian, sehingga :

$$Jf(I,S) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial I} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial I} \end{bmatrix}$$

Setelah masing-masing fungsi diturunkan secara parsial terhadap variabelnya, maka matriks $Jf(I,S)$ di atas menjadi :

$$Jf(I,S)=\begin{bmatrix}\theta-\mu-\beta\frac{I}{N} & \theta-\beta\frac{S}{N}+\gamma\\ \beta\frac{I}{N} & \beta\frac{S}{N}-\mu-\gamma\end{bmatrix}$$

1. Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit, $(I^*,S^*)=(0,\frac{\theta N}{\mu})$, sehingga:

$$Jf(I^*,S^*)=\begin{bmatrix}\theta-\mu & \theta-\beta\frac{\theta}{\mu}+\gamma\\ 0 & \beta\frac{\theta}{\mu}-\mu-\gamma\end{bmatrix}$$

Kemudian langkah selanjutnya adalah mencari determinan $\left(\lambda I-Jf((I^*,S^*)\right)=0$ untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks Jacobian.

Dimisalkan matriks $M_1=(\lambda I-Jf(I^*,S^*)$

$$M_1=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\theta-\mu & \theta-\beta\frac{\theta}{\mu}+\gamma\\ 0 & \beta\frac{\theta}{\mu}-\mu-\gamma\end{bmatrix}$$

$$|M_1|=\begin{bmatrix}\lambda-[\theta-\mu] & -(\theta-\beta\frac{\theta}{\mu}+\gamma)\\ 0 & \lambda-\left[\beta\frac{\theta}{\mu}-\mu-\gamma\right]\end{bmatrix}.$$

Determinan M_1 di atas memperoleh persamaan karakteristik :

$$(\lambda-[\theta-\mu])\left(\lambda-\left[\beta\frac{\theta}{\mu}-\mu-\gamma\right]\right)=0,$$

sehingga nilai eigen-nilai eigen dari persamaan karakteristik di atas :

$$\lambda_1=\theta-\mu, \text{ dan } \lambda_2=\beta\frac{\theta}{\mu}-\mu-\gamma.$$

Berdasarkan penyelesaian di atas, dapat dilihat bahwa $\lambda_1=\theta-\mu<0\Leftrightarrow\theta>\mu$ dan $\lambda_2=\beta\frac{\theta}{\mu}-\mu-\gamma<0\Leftrightarrow\beta\frac{\theta}{\mu}<\mu+\gamma$.

2. Kesetimbangan titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{I},\hat{S})=\left(\frac{(\beta-\mu-\gamma)}{\beta}N,\frac{(\mu+\gamma)}{\beta}N\right)$.

$$Jf(\hat{I},\hat{S})=\begin{bmatrix}\theta-\mu-\beta\frac{I}{N} & \theta-\beta\frac{S}{N}+\gamma\\ \beta\frac{I}{N} & \beta\frac{S}{N}-\mu-\gamma\end{bmatrix},$$

setelah dimasukkan nilai $\hat{I}$ dan $\hat{S}$ maka matriks di atas menjadi :

$$Jf(\hat{I},\hat{S}) = \begin{bmatrix} \theta - \mu - \beta\frac{(\beta-\mu-\gamma)}{\beta} & \theta - \beta\frac{(\mu+\gamma)}{\beta} + \gamma \\ \beta\frac{(\beta-\mu-\gamma)}{\beta} & \beta\frac{(\mu+\gamma)}{\beta} - \mu - \gamma \end{bmatrix}$$

$$Jf(\hat{I},\hat{S}) = \begin{bmatrix} \theta - \beta + \gamma & \theta - \mu \\ \beta - \mu - \gamma & 0 \end{bmatrix}.$$

Dimisalkan matriks $M_2 = \left(\lambda I - Jf(\hat{I},\hat{S})\right)$, maka :

$$M_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - J(\hat{I},\hat{S})$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta - \beta + \gamma & \theta - \mu \\ \beta - \mu - \gamma & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \lambda - \theta + \beta - \gamma & -\theta + \mu \\ -\beta + \mu + \gamma & \lambda \end{bmatrix},$$

selanjutnya $\left(\lambda I - Jf(\hat{I},\hat{S})\right) = 0$.

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - \theta + \beta - \gamma & -\theta + \mu \\ -\beta + \mu + \gamma & \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik matriks Jacobian di atas adalah :

$$(\lambda - \theta + \beta - \gamma)(\lambda) - (-\beta + \mu + \gamma)(-\theta + \mu) = 0$$

$$(\lambda^2 + (\beta - \theta - \gamma)\lambda) - (-\beta + \mu + \gamma)(-\theta + \mu) = 0$$

misalkan $P = (\beta - \theta - \gamma)$ dan Q $= (-\beta + \mu + \gamma)(-\theta + \mu)$, maka persamaan karakteristik di atas memiliki akar-akar :

$$\lambda_1 = \frac{-P + \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$$

dan

$$\lambda_2 = \frac{-P - \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$$

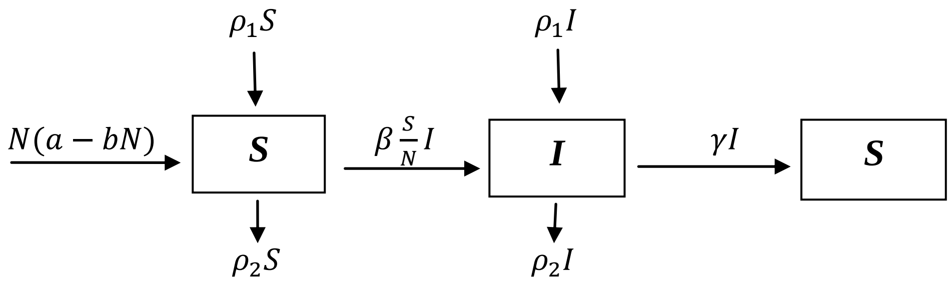
Karena $\theta > \mu$ dan $\beta > \mu + \gamma$, maka bagian real pada $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$.

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian yang dilakukan penulis dalam mengerjakan Tugas akhir ini adalah mempelajari lebih dalam tentang buku-buku dan jurnal-jurnal yang berhubungan dengan pemodelan matematika, dalam hal ini difokuskan pada model SIS penyakit epidemik yang dimodifikasi dengan pertumbuhan logistik dan adanya migrasi.

Adapun metodologi atau langkah-langkah dalam pembuatan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Menentukan rumusan masalah. Artinya, menentukan atau mencari apa saja yang menjadi sumber dan pokok permasalahan yang harus diselesaikan
2. Membuat asumsi-asumsi dalam model matematika. Untuk memudahkan penulis dalam mengerjakan tugas akhir ini, maka penulis membutuhkan beberapa asumsi yang akurat dan harus sesuai dengan model yang diperoleh yaitu model SIS dengan pertumbuhan logistik dan migrasi. Adapun beberapa asumsi tersebut diantaranya adalah adanya pertumbuhan logistik, yaitu pertumbuhan yang berbentuk fungsi monoton (naik atau turun) yang memberikan penafsiran bahwa jumlah populasi akan terus bertambah (tidak pernah berkurang) atau akan terus berkurang (tidak pernah bertambah). Kemudian diberikan juga asumsi adanya migrasi, yaitu imigrasi dan emigrasi.
3. Mendefenisikan paremeter-parameter yang digunakan. Adapun parameter-parameter ataupun koefisien-koefisien yang digunakan dalam model SIS dengan pertumbuhan logistik dan migrasi ini diantaranya adalah a (laju kelahiran), b (laju kematian), β (laju penularan penyakit), ρ_1 (laju imigrasi), ρ_2(laju emigrasi) dan γ (laju kesembuhan).
4. Membuat atau menggambar diagram alir. Diagram alir digunakan untuk memudahkan dalam membaca atau membentuk model matematika. Diagram alir berfungsi untuk membentuk sistem persamaan differensial yang disebut sebagai model matematika. Adapun gambar diagram alir pada model SIS yang dimodifikasi ini adalah:



,

dimana $N(a-bN)$ adalah pertumbuhan logistik, $\rho_1 S$ adalah imigrasi pada kelas S, $\rho_2 S$ adalah emigrasi pada kelas S, $\beta \frac{S}{N} I$ adalah laju penularan penyakit dari kelas S menuju kelas I per jumlah populasi keseluruhan, $\rho_1 I$ adalah imigrasi pada kelas I, $\rho_2 I$ adalah emigrasi pada kelas I dan γI adalah laju kesembuhan penyakit. Setelah diagram alir diatas, maka langkah selanjutnya adalah membuat model matematikanya.

5. Membuat model matematika. Artinya, membentuk model matematika yang sesuai dengan asumsi-asumsi yang sudah diberikan. Model matematika merupakan suatu model yang berbentuk persamaan matematika ataupun berupa sistem persamaan. Dalam mendapatkan model matematika yang sesuai tidaklah mudah, sehingga jika terjadi ketidakvalitan pada model maka perlu peninjauan kembali pada asumsi-asumsi yang diberikan. Adapun model matematika berdasarkan diagram alir pada langkah ke-4 diatas adalah:

$$\frac{dS}{dt} = N(a-bN) + \rho_1 S - \beta \frac{S}{N} I - \rho_2 S + \gamma I,$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{S}{N} I + \rho_1 I - \rho_2 I - \gamma I.$$

6. Menentukan titik kesetimbangan. Titik kesetimbangan (ekuilibrium) yang akan dicari adalah titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit. Titik kesetimbangan bebas penyakit berarti bahwa dalam populasi tidak ada individu yang terinfeksi penyakit, sedangkan titik kesetimbangan endemik penyakit adalah dalam populasi selalu ada individu yang terinfeksi penyakit. Adapun titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu $(I^*, S^*) = \left(0, \frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}\right)$ dan titik kesetimbangan endemik penyakitnya adalah $(\hat{I}, \hat{S}) = \left(\frac{\beta+\rho_1-\rho_2-\gamma}{\beta} N, \frac{\rho_2-\rho_1+\gamma}{\beta} N\right)$.

7. Menganalisa kestabilan dari titik kesetimbangan yang telah ditentukan. Artinya setelah titik kesetimbangan diperoleh, maka diselidiki kestabilan dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik penyakit. Untuk menyelidiki sifat kestabilan titik kesetimbangan tersebut dilakukan linearisasi atau mencari penyelesaian eksak pada sistem dengan menentukan matriks Jacobian terlebih dahulu.
8. Menyimpulkan hasil dari analisa kestabilan titik kesetimbangan. Langkah ini adalah langkah terakhir dimana sudah ditemukan hasil atau jawaban yang valid dari model yang dibahas yaitu model SIS dengan pertumbuhan logistik dan migrasi.

BAB IV
PEMBAHASAN DAN HASIL

Pada bab ini dibahas tentang model SIS dengan pertumbuhan logistik dan migrasi. Seperti yang telah disebutkan pada latar belakang Tugas Akhir ini bahwa model SIS dilakukan jika individu terinfeksi yang telah sembuh dari penyakit tidak mengalami kekebalan tubuh atau dapat juga dikatakan bahwa individu tersebut dapat tertular penyakit kembali. Pada model SIS dengan pertumbuhan logistik dan migrasi ini, populasi dibagi kedalam dua kelas yaitu kelas yang berisi individu-individu rentan terhadap penyakit (*suspectible*), dan kelas yang berisi individu-individu terinfeksi penyakit dan dapat menularkan penyakit (*infectives*).

4.1 Asumsi-asumsi dan Bentuk Model SIS dengan Pertumbuhan Logistik serta Adanya Migrasi

Seperti yang telah disebutkan pada bagian awal Tugas Akhir ini bahwa Model SIS Merupakan suatu model yang mengasumsikan individu yang telah sembuh tidak mengalami kekebalan atau masih dapat tertular penyakit kembali. Ini berarti bahwa model SIS hanya dapat diberlakukan pada beberapa jenis penyakit yang bersifat rentan dan selalu berusaha untuk menghampiri individu-individu meskipun individu tersebut sudah sembuh.

Model SIS dengan pertumbuhan Logistik dan Migrasi adalah suatu model SIS baru yang dimodifikasi dengan menambahkan pertumbuhan logistik dan adanya proses migrasi. Pada model ini dibutuhkan beberapa asumsi-asumsi yang sesuai dan berhubungan dengan model yang diturunkan, yakni model SIS dengan pertumbuhan logistik dan migrasi.

Adapun asumsi-asumsi atau catatan-catatan yang diberikan pada model ini adalah sebagai berikut :

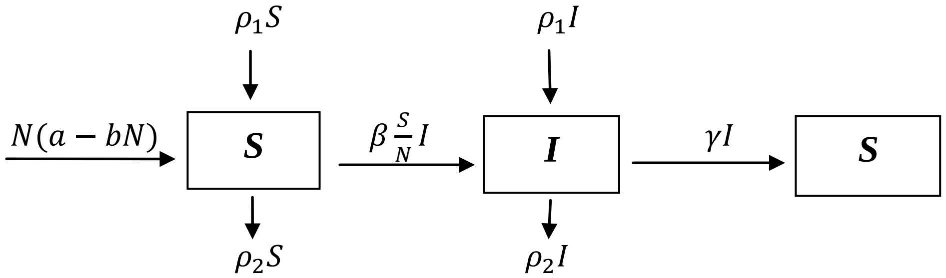
a) Adanya pertumbuhan logistik.
b) Dalam populasi terjadi proses migrasi, dengan laju imigrasi besarnya konstan $\rho_1 > 0$, dan laju emigrasi besarnya konstan $\rho_2 > 0$.

c) Laju penularan penyakit dari *suspectible* menjadi *infectives* adalah konstan dan dinyatakan dengan $\beta > 0$.

d) Laju kesembuhan penyakit dari *infectives* menjadi *suspectible* kembali adalah konstan dan dinyatakan dengan $\gamma > 0$.

e) Populasi tidak tertutup dan tidak konstan.

Sehingga dengan adanya asumsi-asumsi di atas, maka dapatlah dibentuk Model SIS baru yaitu Model SIS dengan Pertumbuhan Logistik dan Migrasi. Berdasarkan asumsi-asumsi di atas maka diperoleh diagram alir model SIS pada gambar berikut ini :



Gambar 4.1 Model SIS dengan Pertumbuhan Logistik dan Migrasi.

Diagram alir di atas dapat dituliskan sebagai sistem persamaan differensial :

$$\frac{dS}{dt} = N(a - bN) + \rho_1 S - \beta \frac{S}{N} I - \rho_2 S + \gamma I,$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{S}{N} I + \rho_1 I - \rho_2 I - \gamma I, \tag{4.1}$$

dengan $S + I = N$ merupakan jumlah populasi keseluruhan.

Karena $N = S + I$ maka $\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt}$, sehingga :

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dt} &= N(a - bN) + \rho_1 S - \beta \frac{S}{N} I - \rho_2 S + \gamma I + \beta \frac{S}{N} I + \rho_1 I - \rho_2 I - \gamma I \\
&= N(a - bN) + \rho_1 S - \rho_2 S + \rho_1 I - \rho_2 I \\
&= N(a - bN) + (\rho_1 - \rho_2) S + (\rho_1 - \rho_2) I \\
&= N(a - bN) + (\rho_1 - \rho_2)(S + I) \\
&= N(a - bN) + (\rho_1 - \rho_2) N \\
&= (a - bN + \rho_1 - \rho_2) N\ .
\end{aligned}$$

Untuk mengetahui kondisi populasi dalam model ini, maka akan dicari solusi dari $\frac{dN}{dt}$ di atas :

$\frac{dN}{dt} \;= (a - bN + \rho_1 - \rho_2)N$, kemudian diintegralkan, sehingga:

$$\int \frac{dN}{(a-bN+\rho_1-\rho_2)N} = \int dt$$

$\int \frac{dN}{(a-bN+\rho_1-\rho_2)N} = t + C$, kemudian $\int \frac{dN}{(a-bN+\rho_1-\rho_2)N}$ dirasionalkan seperti berikut:

$\frac{1}{(a-bN+\rho_1-\rho_2)N} \equiv \frac{A}{N} + \frac{B}{(a-bN+\rho_1-\rho_2)}$ (proses rasionalisasi)

$\frac{1}{(a-bN+\rho_1-\rho_2)N} \equiv \frac{A(a-bN+\rho_1-\rho_2)+BN}{N(a-bN+\rho_1-\rho_2)}$ untuk mengetahui nilai *A* dan *B*, maka dilakukan manipulasi Aljabar sebagai berikut :

$$A(a - bN + \rho_1 - \rho_2) + BN \equiv 1$$

$$A(a - bN + \rho_1 - \rho_2) + BN \equiv 1$$

$$BN - AbN + Aa + A\rho_1 - A\rho_2 \equiv 1$$

$$N(B - Ab) + Aa + A\rho_1 - A\rho_2 \equiv (0)N + 1$$

$B - Ab = 0$ dan $Aa + A\rho_1 - A\rho_2 = 1$, sehingga didapat:

$$Aa + A\rho_1 - A\rho_2 = 1$$

$$A(a + \rho_1 - \rho_2) = 1 \leftrightarrow A = \frac{1}{a+\rho_1-\rho_2}.$$

Kemudian disubstitusikan nilai *A* kedalam $B - Ab = 0$, sehingga:

$$B - \left(\frac{1}{a+\rho_1-\rho_2}\right) b = 0$$

$B = \frac{b}{a+\rho_1-\rho_2}$. Setelah nilai *A* dan *B* didapat maka:

$$\frac{1}{(a-bN+\rho_1-\rho_2)N} = \frac{{}^{1}/_{(a+\rho_1-\rho_2)}}{N} + \frac{{}^{b}/_{(a+\rho_1-\rho_2)}}{(a-bN+\rho_1-\rho_2)} \;,$$

sehingga Integrasinya berubah menjadi :

$$\int \left(\frac{{}^{1}/_{(a+\rho_1-\rho_2)}}{N} + \frac{{}^{b}/_{(a+\rho_1-\rho_2)}}{(a-bN+\rho_1-\rho_2)} \right) dN = t + C$$

$$\int \frac{{}^{1}/_{(a+\rho_1-\rho_2)}}{N} dN + \int \frac{{}^{b}/_{(a+\rho_1-\rho_2)}}{(a-bN+\rho_1-\rho_2)} \; dN = t + C$$

$$\frac{1}{(a+\rho_1-\rho_2)}\int\frac{1}{N}dN+\frac{b}{(a+\rho_1-\rho_2)}\int\frac{1}{(a-bN+\rho_1-\rho_2)}\ dN=t+C,$$

hasil integrasinya adalah:

$$\frac{1}{(a+\rho_1-\rho_2)}\ln|N|-\frac{1}{(a+\rho_1-\rho_2)}\ln|a-bN+\rho_1-\rho_2|=t+C$$

$$\frac{1}{(a+\rho_1-\rho_2)}(\ln|N|\ -\ \ln|a-bN+\rho_1-\rho_2|\,)=t+C$$

$$\frac{1}{(a+\rho_1-\rho_2)}\ln\left[\frac{N}{a-bN+\rho_1-\rho_2}\right]=t+C$$

$$\ln\left[\frac{N}{a-bN+\rho_1-\rho_2}\right]=(a+\rho_1-\rho_2)(t+C)$$

$$\frac{N}{a-bN+\rho_1-\rho_2}=e^{(a+\rho_1-\rho_2)(t+C)} \tag{4.2}$$

Jika $N=N(0)=N_0$, sehingga:

$$\frac{N_0}{a-bN_0+\rho_1-\rho_2}=e^{(a+\rho_1-\rho_2)(0+C)}$$

$$\frac{N_0}{a-bN_0+\rho_1-\rho_2}=e^{(a+\rho_1-\rho_2)C}\leftrightarrow\ \ln\left[\frac{N_0}{a-bN_0+\rho_1-\rho_2}\right]=(a+\rho_1-\rho_2)C$$

Dari bentuk tersebut maka didapat nilai untuk konstanta C yaitu :

$$C=\frac{1}{(a+\rho_1-\rho_2)}\ln\left[\frac{N_0}{a-bN_0+\rho_1-\rho_2}\right],$$

Kemudian C disubstitusikan ke persamaan (4.2) sehingga menjadi :

$$\frac{N}{a-bN+\rho_1-\rho_2}=e^{(a+\rho_1-\rho_2)\left(t+\frac{1}{(a+\rho_1-\rho_2)}\ln\left[\frac{N_0}{a-bN_0+\rho_1-\rho_2}\right]\right)}\quad\text{atau}$$

$$\frac{N}{a+\rho_1-\rho_2-bN}=e^{(a+\rho_1-\rho_2)\left(t+\frac{1}{(a+\rho_1-\rho_2)}\ln\left[\frac{N_0}{a+\rho_1-\rho_2-bN_0}\right]\right)},$$

Jika dimisalkan $a+\rho_1-\rho_2=q$, maka persamaan di atas berubah menjadi :

$$\frac{N}{q-bN}=e^{q\left(t+\frac{1}{(q)}\ln\left[\frac{N_0}{q-bN_0}\right]\right)}$$

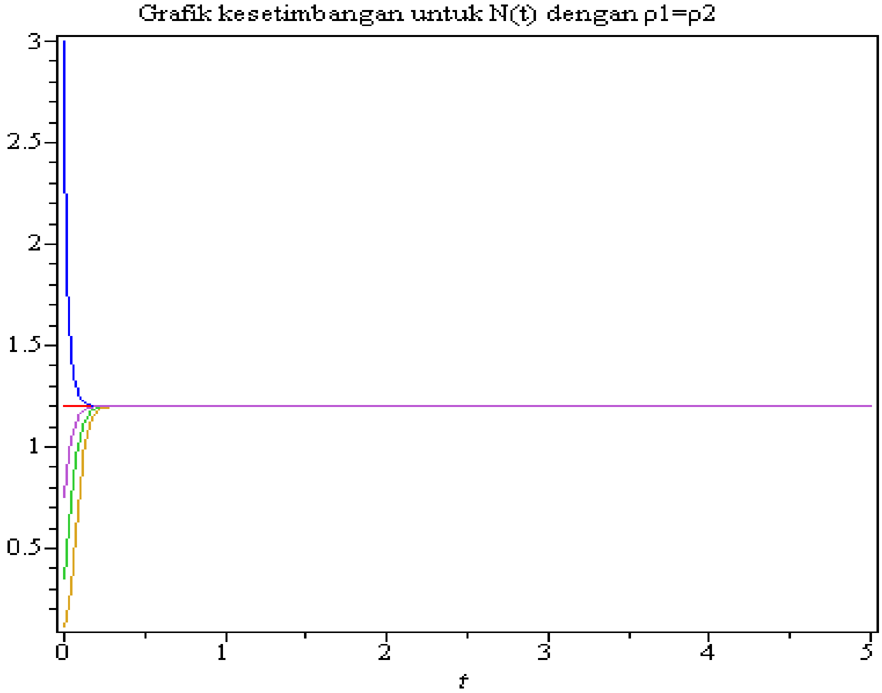
sehingga didapat solusi untuk N, yaitu:

$$N=\frac{\mathrm{q}N_0e^{qt}}{q-bN_0+bN_0e^{qt}}\quad\text{atau}\quad N=\frac{\mathrm{q}/\mathrm{b}}{1+(\frac{q-bN_0}{bN_0})e^{-qt}},$$

dengan $q=a+\rho_1-\rho_2$ dan $a>\rho_2-\rho_1$. Untuk $t\rightarrow\sim$, maka $N={}^{\mathrm{q}}/_{\mathrm{b}}$ atau $N=\frac{a+\rho_1-\rho_2}{\mathrm{b}}$. Jika digambarkan dalam bentuk grafik, dimana $N=\frac{a+\rho_1-\rho_2}{\mathrm{b}}$ adalah titik kesetimbangan untuk (t) , yang dapat digambarkan seperti grafik atau kurva berikut:

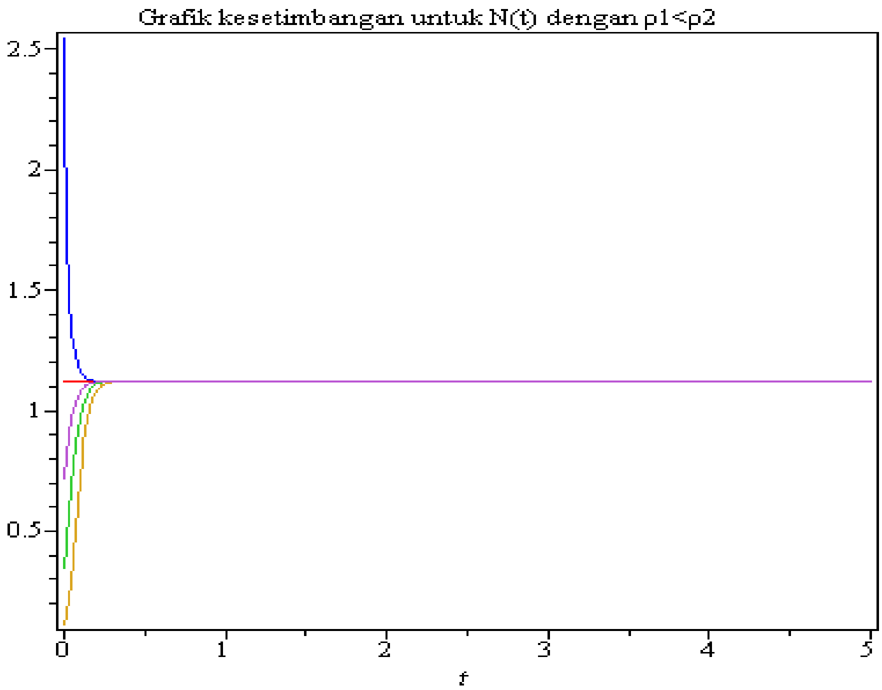
a. Grafik kesetimbangan untuk $N(t)$ dengan $\rho_1 = \rho_2$

Dimisalkan $a = 30$, $b = 25$, $\rho_1 = 5$, dan $\rho_2 = 5$, maka $N = \frac{a}{b} = \frac{30}{25}$.



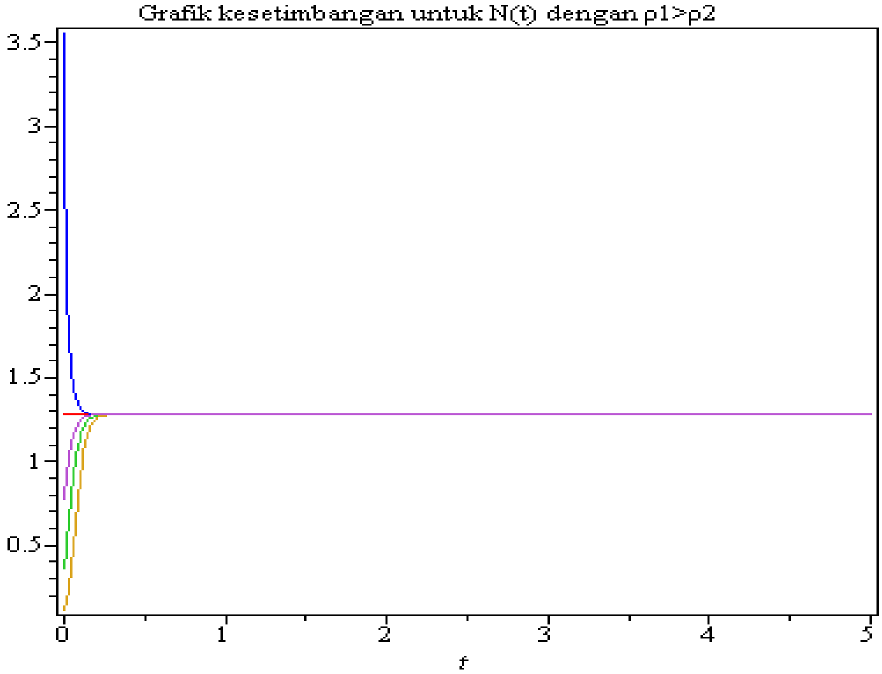
b. Grafik kesetimbangan untuk $N(t)$ dengan $\rho_1 < \rho_2$

Dimisalkan $a = 30$, $b = 25$, $\rho_1 = 3$, dan $\rho_2 = 5$, maka $N = \frac{28}{25}$.



c. Grafik kesetimbangan untuk $N(t)$ dengan $\rho_1 > \rho_2$

Dimisalkan $a = 30$, $b = 25$, $\rho_1 = 7$, dan $\rho_2 = 5$, maka $N = \frac{32}{25}$.



Selanjutnya dari Sistem (4.1) akan dicari titik kesetimbangannya, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit.

4.2 Titik Kesetimbangan (*Equilibrium*)

Titik kesetimbangan dari Sistem (4.1) dapat ditentukan dalam dua keadaan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit .

1. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit merupakan suatu titik dimana tidak ada satupun individu yang terserang penyakit $(I = 0)$. Untuk mendapatkan titik kesetimbangan Sistem (4.1), maka masing-masing persamaan pada Sistem (4.1) diberi nilai nol, sehingga Sistem (4.1) menjadi,

$$N(a - bN) + \rho_1 S - \beta \frac{S}{N} I - \rho_2 S + \gamma I = 0 \tag{4.3}$$

$$\beta \frac{S}{N} I + \rho_1 I - \rho_2 I - \gamma I = 0 \tag{4.4}$$

Untuk mendapatkan S, substitusikan $I = 0$ pada persamaan (4.3) di atas. Karena pada persamaan (4.3) terdapat N dan diketahui bahwa $N = S + I$, maka diperoleh $N = S$, sehingga persamaan (4.3) berubah menjadi :

$$\mathrm{S}(a - bS) + \rho_1 S - \beta \frac{S}{N} I - \rho_2 S + \gamma I = 0,$$

jika diselesaikan maka bentuk di atas menjadi :

$$S(a - bS) + \rho_1 S - \rho_2 S = 0$$

$$aS - bS^2 + \rho_1 S - \rho_2 S = 0$$

$$(a - bS + \rho_1 - \rho_2)S = 0,$$

yang berarti bahwa $S = 0$ atau $S = \frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}$. Karena $S = 0$ tidak memenuhi, maka yang diambil adalah $S = \frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}$, sehingga diperoleh S untuk titik kesetimbangan bebas penyakit yang dinotasikan dengan S^*, yaitu $S^* = \frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}$.

Berdasarkan penyelesaian di atas, maka diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit $(I^*, S^*) = \left(0, \frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}\right)$.

2. Titik Kesetimbangan Endemik Penyakit

Titik kesetimbangan endemik penyakit artinya selalu ada penyakit dalam populasi atau $I > 0$. Dari persamaan (4.4) diperoleh :

$$\beta \frac{S}{N} I + \rho_1 I - \rho_2 I - \gamma I = 0$$

$$\left(\beta \frac{S}{N} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma\right) I = 0 \qquad\qquad I \neq 0$$

$$\left(\beta \frac{S}{N} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma\right) = 0$$

$$\beta \frac{S}{N} = -\rho_1 + \rho_2 + \gamma$$

Sehingga diperoleh S untuk titik kesetimbangan endemik penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{S}$, yaitu $\hat{S} = \frac{\rho_2-\rho_1+\gamma}{\beta} N$, dengan $N = S + I$.

Karena $S + I = N$, Sehingga Untuk mendapatkan nilai I dapat dilakukan sebagai berikut :

$$S + I = N$$

$$I = N - S$$

$$I = N - \left(\frac{\rho_2 - \rho_1 + \gamma}{\beta} N\right)$$

Sehingga diperoleh I untuk titik kesetimbangan endemik penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{I}$, yaitu $\hat{I} = \frac{\beta + \rho_1 - \rho_2 - \gamma}{\beta} N$.

Berdasarkan penyelesaian di atas, maka diperoleh titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{I}, \hat{S}) = \left(\frac{\beta + \rho_1 - \rho_2 - \gamma}{\beta} N, \frac{\rho_2 - \rho_1 + \gamma}{\beta} N\right)$.

4.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Setelah diperoleh titik kesetimbangan dari Sistem (4.1), maka akan diselidiki kestabilan titik kesetimbangan pada model tersebut. Untuk mengetahui kestabilan titik kesetimbangan pada model tersebut dapat dilihat uraian di bawah ini :

Misalkan :

$$f(I,S) = N(a - bN) + \rho_1 S - \beta \frac{S}{N} I - \rho_2 S + \gamma I$$

$$g(I,S) = \beta \frac{S}{N} I + \rho_1 I - \rho_2 I - \gamma I$$

Kemudian masing-masing fungsi diturunkan secara parsial terhadap variabel pada fungsi tersebut, seperti di bawah ini :

- Fungsi $f(I,S)$ diturunkan terhadap variabel S :

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{\partial\left(N(a-bN) + \rho_1 S - \beta \frac{S}{N} I - \rho_2 S + \gamma I\right)}{\partial S} = \frac{\partial\left((S+I)(a - b(S+I)) + \rho_1 S - \beta \frac{S}{N} I - \rho_2 S + \gamma I\right)}{\partial S}$$

$$= \frac{\partial\left(aS + aI - bS^2 - 2bSI - bI^2 + \rho_1 S - \beta \frac{S}{N} I - \rho_2 S + \gamma I\right)}{\partial S}$$

$$= a - 2bS - 2bI + \rho_1 - \beta \frac{I}{N} - \rho_2$$

- Fungsi $f(I,S)$ diturunkan terhadap variabel I :

$$\frac{\partial f}{\partial I} = \frac{\partial(aS + aI - bS^2 - 2bSI - bI^2 + \rho_1 S - \beta \frac{S}{N} I - \rho_2 S + \gamma I)}{\partial I}$$

$$= a - 2bS - 2bI - \beta \frac{S}{N} + \gamma$$

- Fungsi $g(I,S)$ diturunkan terhadap variabel S :

$$\frac{\partial g}{\partial S} = \frac{\partial\left(\beta \frac{S}{N} I + \rho_1 I - \rho_2 I - \gamma I\right)}{\partial S} = \beta \frac{I}{N}$$

- Fungsi $g(I,S)$ diturunkan terhadap variabel I :

$$\frac{\partial g}{\partial I}=\frac{\partial\left(\beta\frac{S}{N}I+\rho_1 I-\rho_2 I-\gamma I\right)}{\partial I}=\beta\frac{S}{N}+\rho_1-\rho_2-\gamma$$

Setelah proses penurunan parsial di atas dilakukan, maka selanjutnya akan dicari matriks Jacobian ($Jf(I,S)$), yaitu sebagai berikut :

$Jf(I,S)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial I}\\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial I}\end{bmatrix}$, sehingga matriks jacobiannya menjadi:

$$Jf(I,S)=\begin{bmatrix}a-2bS-2bI+\rho_1-\beta\frac{I}{N}-\rho_2 & a-2bS-2bI-\beta\frac{S}{N}+\gamma\\ \beta\frac{I}{N} & \beta\frac{S}{N}+\rho_1-\rho_2-\gamma\end{bmatrix}$$

berdasarkan matriks Jacobian di atas, maka:

1) Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit, $(I^*,S^*)=(0,\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b})$.

   Teorema 4.1 : Titik kesetimbangan bebas penyakit, $(I^*,S^*)=(0,\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b})$ stabil asimtotik jika $\rho_2<\rho_1+a$ dan $\beta+\rho_1<\rho_2+\gamma$.

   Pembuktian:

   Berdasarkan matriks Jacobian $Jf(I,S)$ di atas maka matriks $Jf\left((I^*,S^*)\right)$ menjadi :

   $Jf(I^*,S^*)=$

$$\begin{bmatrix}a-2b\left(\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}\right)+\rho_1-\rho_2 & a-2b\left(\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}\right)-\beta\frac{\left(\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}\right)}{N}+\gamma\\ 0 & \beta\frac{\left(\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}\right)}{N}+\rho_1-\rho_2-\gamma\end{bmatrix},$$

   karena $N=S+I$ dan $I=0$ maka diperoleh $N=S$, sehingga matriks Jcobian di atas menjadi :

   $Jf(I^*,S^*)=$

$$\begin{bmatrix}a-2b\left(\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}\right)+\rho_1-\rho_2 & a-2b\left(\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}\right)-\beta\frac{\left(\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}\right)}{\left(\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}\right)}+\gamma\\ 0 & \beta\frac{\left(\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}\right)}{\left(\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}\right)}+\rho_1-\rho_2-\gamma\end{bmatrix}$$

$$Jf(I^*,S^*)=\begin{bmatrix}\rho_2-\rho_1-a & 2\rho_2-2\rho_1-a+\beta+\gamma\\ 0 & \beta+\rho_1-\rho_2-\gamma\end{bmatrix}.$$

Setelah matriks jacobian dilengkapi, langkah selanjutnya adalah mencari determinan $\left(\lambda I - Jf((I^*, S^*)\right) = 0$ untuk mendapatkan nilai eigen.

Misalkan matriks $A_1 = (\lambda I - Jf(I^*, S^*)$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_2 - \rho_1 - a & 2\rho_2 - 2\rho_1 - a + \beta + \gamma \\ 0 & \beta + \rho_1 - \rho_2 - \gamma \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda - [\rho_2 - \rho_1 - a] & -(2\rho_2 - 2\rho_1 - a + \beta + \gamma) \\ 0 & \lambda - [\beta + \rho_1 - \rho_2 - \gamma] \end{bmatrix}.$$

Dari determinan $|A_1|$ di atas diperoleh persamaan karakteristik, yaitu : $\left(\lambda - [\rho_2 - \rho_1 - a]\right)\left(\lambda - [\beta + \rho_1 - \rho_2 - \gamma]\right) = 0$, sehingga dapat ditentukan nilai eigen-nilai eigen dari persamaan karakteristik di atas :

$\lambda_1 = \rho_2 - \rho_1 - a$ dan $\lambda_2 = \beta + \rho_1 - \rho_2 - \gamma$.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa kesetimbangan bebas penyakit $(I^*, S^*) = (0, \frac{a+\rho_1-\rho_2}{b})$ stabil asimtotik jika $\rho_2 - \rho_1 - a < 0$ yang mengakibatkan $\rho_2 < \rho_1 + a$ dan $\beta + \rho_1 - \rho_2 - \gamma < 0$, mengakibatkan $\beta + \rho_1 < \rho_2 + \gamma$. Hal ini berarti bahwa dalam waktu yang cukup lama tidak ada lagi penyakit dalam populasi, dengan kata lain jika dalam populasi emigrasi lebih kecil daripada imigrasi ditambah dengan kelahiran. Kemudian laju penularan penyakit ditambah dengan imigrasi lebih kecil daripada emigrasi ditambah dengan laju kesembuhan.

Simulasi *(contoh 1)* :

Diketahui : $Jf(I^*, S^*) = \begin{bmatrix} \rho_2 - \rho_1 - a & 2\rho_2 - 2\rho_1 - a + \beta + \gamma \\ 0 & \beta + \rho_1 - \rho_2 - \gamma \end{bmatrix}$, adalah matriks jacobian untuk kesetimbangan bebas penyakit dimana $\rho_2 < \rho_1 + a$ dan $\beta + \rho_1 < \rho_2 + \gamma$.

Diambil $a = 20$, $\rho_1 = 10$, $\rho_2 = 8$, $\beta = 4$ dan $\gamma = 15$, sehingga matriks jacobiannya berubah menjadi:

$$Jf(I^*, S^*) = \begin{bmatrix} 8 - 10 - 20 & 2(8) - 2(10) - 20 + 4 + 15 \\ 0 & 4 + 10 - 8 - 15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -22 & -5 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan dicari kestabilan titik kesetimbangannya yaitu sebagai berikut:

$\begin{pmatrix} \frac{dI}{dt} \\ \frac{dS}{dt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -22 & -5 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix}$ adalah bentuk khusus dari kestabilan titik kesetimbangan untuk dua variabel, sehingga:

$$\frac{dI}{dt} = -22I - 5S \ ,$$

$$\frac{dS}{dt} = -9S \ .$$

Misalkan λ nilai eigen dari Matriks $Jf(I^*, S^*) = \begin{bmatrix} -22 & -5 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$. Matriks $Jf(I^*, S^*)$ mempunyai bentuk yang sama dengan $Jf(I^*, S^*) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka diperoleh persamaan karakteristik:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

Berdasarkan persamaan karakteristik di atas, diperoleh:

$$\lambda_{1.2} = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

atau

$$\lambda_{1.2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{, dengan } p = a + d \text{ dan } q = ad - bc.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai koefisien (parameter) yang ada, maka diperoleh:

$$\lambda_{1.2} = \frac{-22+(-9) \pm \sqrt{((-22)+(-9))^2 - 4((-22)((-9)) - (-5)(0))}}{2}$$

$$\lambda_{1.2} = \frac{-31 \pm \sqrt{(-31)^2 - 4(198)}}{2}$$

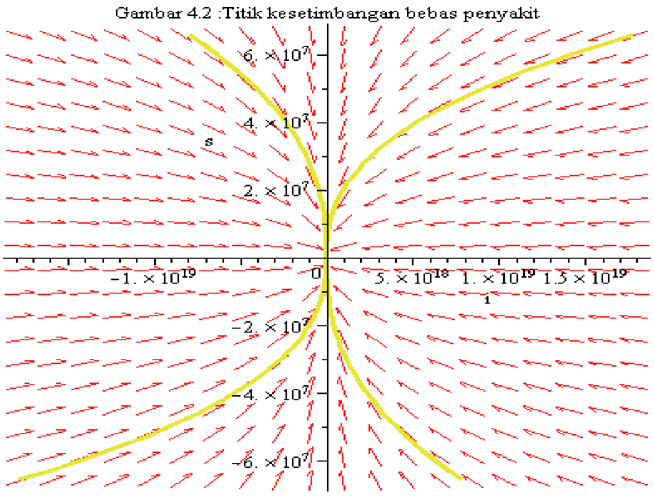
$$\lambda_{1.2} = \frac{-31 \pm \sqrt{961 - 792}}{2}$$

$$\lambda_{1.2} = \frac{-31 \pm \sqrt{169}}{2}$$

$$\lambda_{1.2} = \frac{-31 \pm 13}{2} \text{, sehingga diperoleh:}$$

$$\lambda_1 = \frac{-31+13}{2} = -9 \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = \frac{-31-13}{2} = -22.$$

Karena $\lambda_{1.2}$ real dan berbeda, kemudian $p^2 - 4q > 0$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit adalah Stabil. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada gambar berikut ini :



Gambar 4.2 Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit.

Gambar 4.2 di atas menjelaskan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit adalah stabil asimtotik, hal ini dapat dilihat dari panah-panah yang menuju kearah yang sama.

Sebaliknya jika diambil sebarang bilangan yang tidak memenuhi syarat yang diberikan, maka titik kesetimbangan adalah tidak stabil.

Misalkan diambil $a = 3$, $\rho_1 = 4$, $\rho_2 = 10$, $\beta = 10$ dan $\gamma = 2$, kemudian disubstitusikan ke matriks jacobian:

$$Jf(I^*, S^*) = \begin{bmatrix} \rho_2 - \rho_1 - a & 2\rho_2 - 2\rho_1 - a + \beta + \gamma \\ 0 & \beta + \rho_1 - \rho_2 - \gamma \end{bmatrix},$$

yang berubah menjadi:

$$Jf(I^*, S^*) = \begin{bmatrix} 10 - 4 - 3 & 2(10) - 2(4) - 3 + 10 + 2 \\ 0 & 10 + 4 - 10 - 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 21 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan dicari kestabilan titik kesetimbangannya yaitu sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} \frac{dI}{dt} \\ \frac{dS}{dt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 21 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix}$$ adalah bentuk khusus dari kestabilan titik kesetimbangan untuk dua variabel, sehingga:

$$\frac{dI}{dt} = 3\,I + 21\,S\,,$$

$$\frac{dS}{dt} = 2\,S\,.$$

Jika diselesaikan maka:

$$\lambda_{1.2} = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

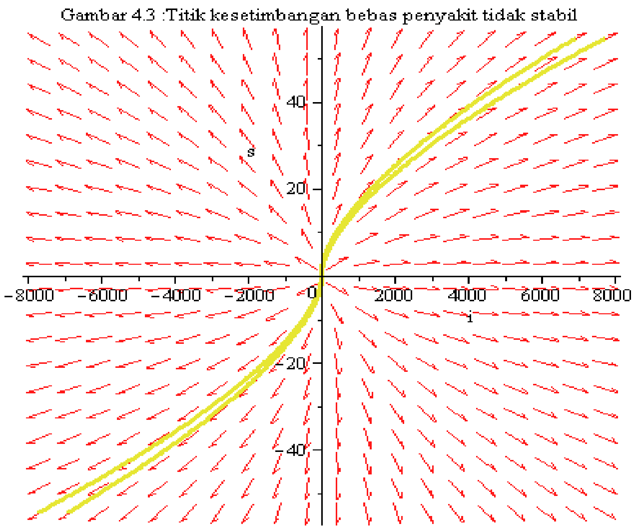
$$\lambda_{1.2} = \frac{3+2 \pm \sqrt{(3+2)^2 - 4(3(2)-21(0)}}{2}$$

$$\lambda_{1.2} = \frac{5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(6-0)}}{2}$$

$\lambda_{1.2} = \frac{5 \pm 1}{2}$, sehingga diperoleh:

$\lambda_1 = \frac{5+1}{2} = 3$ dan $\lambda_2 = \frac{5-1}{2} = 2.$

Karena $p > 0$ dan positif maka titik kesetimbangan bebas penyakit adalah tidak stabil. Hal ini dapat juga dilihat pada gambar 4.3 berikut:



Gambar 4.3 Titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil.

Dari gambar di atas nampak bahwa semua arah panah tidak searah, artinya titik kesetimbangan bebas penyakit adalah tidak stabil.

2) Kestabilan titik kesetimbangan endemik penyakit

Teorema 4.2 : Titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{I},\hat{S}) = \left(\frac{\beta+\rho_1-\rho_2-\gamma}{\beta}N, \frac{\rho_2-\rho_1+\gamma}{\beta}N\right)$ adalah stabil asimotik jika $2bN+\beta > a+\gamma$ dan $\rho_1+\rho_2 > a-2bN$.

Bukti :

Seperti halnya dengan menyelesaikan titik kesetimbangan bebas penyakit, maka kestabilan titik kesetimbangan endemik penyakit juga diselesaikan dengan cara yang sama. Untuk menyelesaikannya dapat dilihat melalui uraian di bawah ini :

Diketahui bahwa:

$$Jf(I,S) = \begin{bmatrix} a-2bS-2bI+\rho_1-\beta\frac{I}{N}-\rho_2 & a-2bS-2bI-\beta\frac{S}{N}+\gamma \\ \beta\frac{I}{N} & \beta\frac{S}{N}+\rho_1-\rho_2-\gamma \end{bmatrix},$$

setelah dimasukkan nilai $\hat{I}$ dan $\hat{S}$ maka matriks di atas menjadi :

$$Jf(\hat{I},\hat{S}) = \begin{bmatrix} a-2bN-\beta+\gamma & a-2bN-\rho_2+\rho_1 \\ \beta+\rho_1-\rho_2-\gamma & 0 \end{bmatrix}.$$

Langkah selanjutnya mencari determinan $\left(\lambda I - Jf(\hat{I},\hat{S})\right) = 0$. Misalkan matriks $A_2 = \left(\lambda I - Jf(\hat{I},\hat{S})\right)$, maka :

$$A_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - J(\hat{I},\hat{S})$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a-2bN-\beta+\gamma & a-2bN-\rho_2+\rho_1 \\ \beta+\rho_1-\rho_2-\gamma & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \lambda-a+2bN+\beta-\gamma & 2bN-a-\rho_1+\rho_2 \\ -\beta-\rho_1+\rho_2+\gamma & \lambda \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks di atas, maka akan dicari determinan $\left(\lambda I - Jf(\hat{I},\hat{S})\right) = 0$.

$$|A_2| = \begin{bmatrix} \lambda-a+2bN+\beta-\gamma & 2bN-a-\rho_1+\rho_2 \\ -\beta-\rho_1+\rho_2+\gamma & \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

sehingga diperoleh persamaan karakteristik matriks Jacobian di atas yaitu :

$(\lambda - a + 2bN + \beta - \gamma)(\lambda) - (-\beta - \rho_1 + \rho_2 + \gamma)(2bN - a - \rho_1 + \rho_2) = 0$

$\lambda^2 + (2bN - a + \beta - \gamma)\lambda - (\rho_2 - \beta - \rho_1 + \gamma)(2bN - a - \rho_1 + \rho_2) = 0.$

Misalkan $P = 2bN - a + \beta - \gamma$ dan $Q = (\rho_2 - \beta - \rho_1 + \gamma)(2bN - a - \rho_1 + \rho_2)$, maka persamaan karakteristik di atas dapat ditulis seperti berikut :

$\lambda^2 + P\lambda - Q = 0$, sehingga didapat akar-akar persamaan atau nilai eigennya, yaitu sebagai berikut:

$$\lambda_1 = \frac{-P + \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$$

dan

$$\lambda_2 = \frac{-P - \sqrt{P^2 - 4Q}}{2},$$

dimana $2bN + \beta > a + \gamma$ dan $\rho_1 + \rho_2 > a - 2bN$, maka bilangan real pada $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$ yang berarti bahwa pada populasi selalu ada individu yang terinfeksi penyakit. Hal ini dapat diartikan juga bahwa, untuk $t \to \sim$ atau dalam waktu yang begitu lama selalu ada penyakit dalam populasi. Hal ini terjadi jika dalam populasi laju penularan ditambah dengan dua kali kematian alami lebih besar daripada kelahiran ditambah dengan laju kesembuhan, kemudian besarnya imigrasi ditambah dengan emigrasi lebih besar daripada kelahiran dikurangi dengan dua kali kematian alami.

Simulasi *(contoh 2)*:

Diketahui : $Jf(I^*, S^*) = \begin{bmatrix} a - 2bN - \beta + \gamma & a - 2bN - \rho_2 + \rho_1 \\ \beta + \rho_1 - \rho_2 - \gamma & 0 \end{bmatrix}$

adalah matriks jacobian untuk kesetimbangan endemik penyakit dimana $2bN + \beta > a + \gamma$ dan $\rho_1 + \rho_2 > a - 2bN.$

Diambil $bN = 30$, $a = 20$, $\rho_1 = 10$, $\rho_2 = 8$, $\beta = 10$ dan $\gamma = 6$, sehingga matriks jacobiannya berubah menjadi:

$$Jf(I^*,S^*) = \begin{bmatrix} 20-2(30)-10+6 & 20-2(30)-8+10 \\ 10+10-8-6 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -44 & -22 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya dicari kestabilan titik kesetimbangannya yaitu sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} \frac{dI}{dt} \\ \frac{dS}{dt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -44 & -22 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix}$$, sehingga didapat:

$$\frac{dI}{dt} = -44I - 22S ,$$

$$\frac{dS}{dt} = 6I.$$

Dengan cara yang sama saat mengerjakan kestabilan titik kesetimbangan pada titik kesetimbangan bebas penyakit, maka dari bentuk di atas diperoleh:

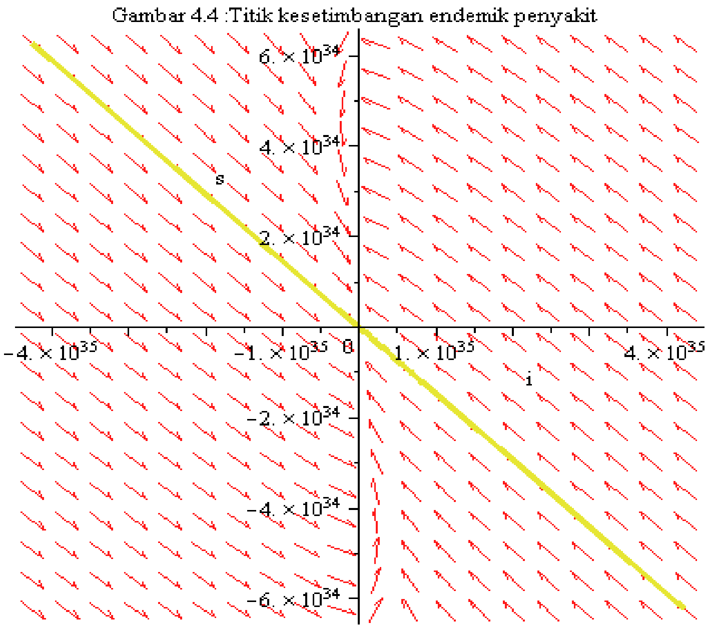
$$\lambda_{1.2} = \frac{-44+0 \pm \sqrt{((-44)+0)^2 - 4((-44)(0)-(-22)(6))}}{2}$$

$$\lambda_{1.2} = \frac{-44 \pm \sqrt{(-44)^2 - 4(132)}}{2}$$

$$\lambda_{1.2} = \frac{-44 \pm \sqrt{1936-528}}{2}$$

$$\lambda_{1.2} = \frac{-44 \pm \sqrt{1408}}{2} .$$

Karena $\lambda_{1.2}$ merupakan penyelesaian yang real dan berbeda, kemudian $p^2 - 4q > 0$ serta $q > 0$ maka titik kesetimbangan endemik penyakit adalah Stabil. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada gambar berikut ini:



Gambar 4.4 Kestabilan titik kesetimbangan endemik penyakit.

Sebaliknya jika diambil sebarang bilangan yang tidak memenuhi syarat yang diberikan, maka titik kesetimbangan adalah tidak stabil.

Misalkan diambil $bN = 5$, $a = 20$, $\rho_1 = 4$, $\rho_2 = 3$, $\beta = 6$ dan $\gamma = 8$, kemudian disubstitusikan ke matriks jacobian:

$$Jf(I^*, S^*) = \begin{bmatrix} a - 2bN - \beta + \gamma & a - 2bN - \rho_2 + \rho_1 \\ \beta + \rho_1 - \rho_2 - \gamma & 0 \end{bmatrix},$$

yang berubah menjadi:

$$Jf(I^*, S^*) = \begin{bmatrix} 20 - 2(5) - 6 + 8 & 20 - 2(5) - 3 + 4 \\ 6 + 4 - 3 - 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 11 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan dicari kestabilan titik kesetimbangannya yaitu sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} \frac{dI}{dt} \\ \frac{dS}{dt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 11 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix}, \text{ sehingga:}$$

$$\frac{dI}{dt} = 12\,I + 11\,S\,,$$

$$\frac{dS}{dt} = -1\,I\,.$$

Jika diselesaikan maka:

$$\lambda_{1.2} = \frac{12+0 \pm \sqrt{((12+0)^2 - 4((12)(0) - (11)(-1))}}{2}$$

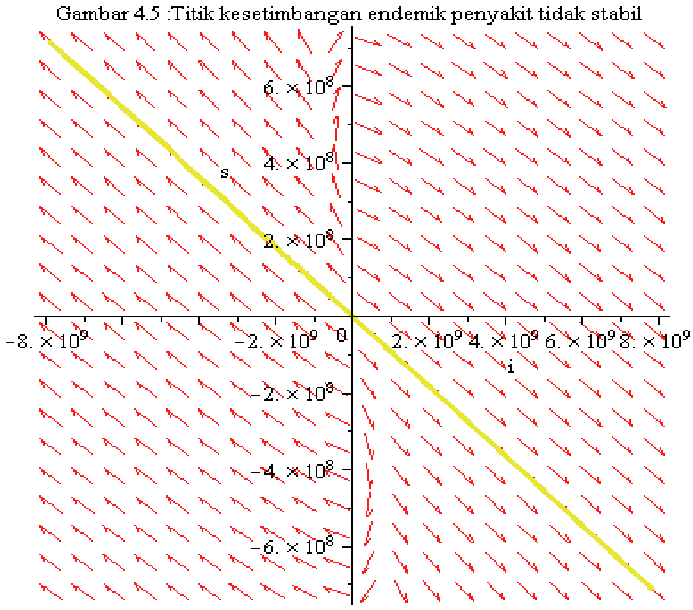
$$\lambda_{1.2} = \frac{12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4(11)}}{2}$$

$$\lambda_{1.2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 44}}{2}$$

$\lambda_{1.2} = \frac{12 \pm \sqrt{100}}{2}$, sehingga diperoleh:

$\lambda_1 = \frac{12+10}{2} = 11$ dan $\lambda_2 = \frac{12-10}{2} = 1.$

Karena $p > 0$ dan positif maka titik kesetimbangan endemik penyakit adalah tidak stabil. Hal ini dapat dilihat pada gambar 4.5 berikut:



Gambar 4.5 Titik kesetimbangan endemik penyakit tidak stabil.

BAB V
PENUTUP

Pada bab penutup ini, penulis akan menarik suatu kesimpulan berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya serta penulis juga akan memberikan sedikit saran kepada pembaca yang mungkin nantinya akan meneruskan atau mengkaji tentang pemodelan matematika yaitu model penyebaran penyakit.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan perhitungan dan pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Model SIS dengan pertumbuhan logistik dan migrasi adalah :

   $$\frac{dS}{dt} = N(a - bN) + \rho_1 S - \beta \frac{S}{N} I - \rho_2 S + \gamma I$$

   $$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{S}{N} I + \rho_1 I - \rho_2 I - \gamma I$$

   dengan jumlah populasi keseluruhan $S + I = N$, dimana S adalah kelas *suspectible* (kelas sehat) dan I adalah kelas *infectives* (kelas terinfeksi penyakit).

2. Solusi untuk N (t) adalah :

   $$N = \frac{qN_0 e^{qt}}{q - bN_0 + bN_0 e^{qt}}$$ atau dapat ditulis seperti:

   $$N = \frac{q/b}{1 + (\frac{q - bN_0}{bN_0}) e^{-qt}},$$ dimana $q = a + \rho_1 - \rho_2$ dan $a > \rho_2 - \rho_1$.

   Dalam waktu yang lama atau $t \rightarrow \sim$, maka $N = q/b$ atau $= \frac{a + \rho_1 - \rho_2}{b}$.

3. Ada dua titik kesetimbangan pada model SIS dengan pertumbuhan logistik dan migrasi yaitu :

   a. Titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu $(I^*, S^*) = \left(0, \frac{a + \rho_1 - \rho_2}{b}\right)$.

   b. Titik kesetimbangan endemik penyakit yaitu $(\hat{I}, \hat{S}) = \left(\frac{\beta + \rho_1 - \rho_2 - \gamma}{\beta} N, \frac{\rho_2 - \rho_1 + \gamma}{\beta} N\right)$.

4. Ada dua kestabilan titik kesetimbangan pada model SIS dengan pertumbuhan logistik dan migrasi, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kestabilan endemik penyakit. Titik kesetimbangan bebas penyakit $(I^*, S^*) = (0, \frac{a+\rho_1-\rho_2}{b})$ stabil asimtotik jika $\rho_2 < \rho_1 + a$ dan $\beta + \rho_1 < \rho_2 + \gamma$. Sedangkan titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{I}, \hat{S}) = \left(\frac{\beta+\rho_1-\rho_2-\gamma}{\beta} N, \frac{\rho_2-\rho_1+\gamma}{\beta} N\right)$ stabil asimotik jika $2bN + \beta > a + \gamma$ dan $\rho_1 + \rho_2 > a - 2bN$.

5.2 Saran

Pada Tugas Akhir ini penulis mengkaji tentang pemodelan penyebaran penyakit menular pada suatu populasi yang dikerjakan dengan asumsi-asumsi tertentu, dan untuk menyelidiki kestabilan titik kesetimbangannya penulis menggunakan metode linearisasi. Bagi pembaca yang mungkin tertarik dengan topik ini atau mengkaji lebih dalam lagi mengenai penyebaran penyakit menular disarankan menggunakan asumsi-asumsi yang lebih kompleks atau menembahkan asumsi lain, misalnya menambahkan adanya vaksinasi pada populasi serta menggunakan metode lain selain dari metode linearisasi untuk menyelidiki kestabilan titik kesetimbangannya.

DAFTAR PUSTAKA

Baiduri. *Persamaan Differensial dan Matematika Model.* Malang: UMM Press. 2002.

Ferawati. Analisis Kestabilan Titik Tetap Pada Model SIS dengan Penambahan Populasi Rentan, Konstan dan penambahan populasi dan Kematian, Sesuai Persamaan Logistik*, Tugas Akhir Mahasiswa Institut Teknologi Bandung,* Bogor. 2004.

Finizio dan Ladas. *Penerapan Differensial Biasa degan Penerapan Modern,* Edisi Kedua. Terjemahan Widiarti Santoso. Jakarta : Erlangga. 1998.

Haberman, Richard. *Mathematical models in mechanical vibrations, population dynamics, and traffic flow*. USA. 1977.

Hale, J. K. dan Kocak, H. *Dynamic and Bifurcation,* Springer-verlag, New York. 1991.

Meiss, J. D. *Differential Dyamical Systems,* Society for Industrial and Applied Mathematics, USA. 2007.

Neuhauser, Claudia. *Calculus for Biologyad Medicie.* New Jersey : Pearson Education. 2004.

Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems,* Springer-verlag, New York. 1991.

Umbari, Helvi Agustianti. Model SIS (*Suspectible, Infectives, Suspectible*) dengan pertumbuhan alami dan proses migrasi. *Tugas Akhir Mahasiswa Uin Suska Riau,* Pekanbaru. 2012.